Factorisation LU

Théorème Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls.
Il existe alors un unique couple (L, U), avec L triangulaire inférieure de diagonale unité et U triangulaire supérieure, tel que $A = LU$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons :

$\Delta^{(k)}$ le k-ième mineur principal, $\Delta^{(k)} = \det M^{(k)}$

• Supposons qu'au cours de l'élimination de Gauss, il n'y ait pas besoin de faire de permutations, i.e les pivots naturels non nuls, $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$.
On note $A^{(k)}$ la matrice obtenue après élimination avec le $(k-1)$-ème pivot.
On a alors :

$$A^{(n)} = E_{n-1} \dots E_1 A$$

avec :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ E_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & & -c_{k+1,k} & 1 & \\ (0) & & \vdots & & \ddots \\ & & -c_{n,k} & (0) & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et : } \forall i \in [\![k+1, n]\!],\ c_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}.$$

On pose alors $U = A^{(n)}$ et $L = E_1^{-1} \dots E_{n-1}^{-1}$.
Comme :

$$E_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ (0) & & c_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & (0) & \ddots \\ & & c_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alors } L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ c_{2,1} & \ddots & (0) & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

est bien triangulaire inférieure de diagonale unité

U est bien triangulaire supérieure par construction

• Montrons par récurrence que les pivots naturels $a_{k,k}^{(k)}$ sont non nuls.

initialisation :

$a_{1,1}^{(1)} = a_{1,1} = \Delta_1 \neq 0$ par hypothèse

hérédité : supposons que pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $a_{i,i}^{(i)} \neq 0$
Comme les $k-1$ premiers pivots sont non nuls, on peut calculer $A^{(k)}$.
On a alors :

$$E_1^{-1} \dots E_{k-1}^{-1} A^{(k)} = A, \text{ autrement dit : } \begin{pmatrix} L_{1,1}^k & 0 \\ M_{2,1}^k & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1}^k & A_{1,2}^k \\ & A_{2,2}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{(k)} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

D'où :

$L_{1,1}^k U_{1,1}^k = M^{(k)}$ avec $L_{1,1}^k$ triangulaire inférieure avec diagonale unité et U_{11}^k triangulaire supérieure. Ainsi :

$\det U_{1,1}^k = \Delta_k \neq 0$ mais $\det U_{1,1}^k = \prod_{i=1}^{k} a_{i,i}^{(i)}$

Donc : $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$.

• Montrons l'unicité de la décomposition.
Soient deux décompositions LU de la matrice A, $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$.
On a alors :

$$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$$

Or $L_2^{-1} L_1$ est triangulaire inférieure et $U_2 U_1^{-1}$ est triangulaire supérieure, elles sont donc diagonales.

De plus, la diagonale de $L_2^{-1} L_1$ est composée de 1, donc : $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I_n$.

Ainsi :

$L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$